

SERIES DE TAYLOR

Definición

Una función $f(x)$ puede ser expresada como una expansión en serie de potencias alrededor de un punto x_0 (llamado centro) mediante la serie:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

denominada **serie de Taylor**, siempre que todas las derivadas de $f(x)$ existan en el punto x_0 . Las funciones que se pueden expresar de esta manera se denominan "regulares".

Un caso especial de la serie de Taylor se obtiene cuando se toma como centro $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

A esta última serie se le denomina también **serie de Maclaurin**.

Ejemplos de series

COMO SERIE	COMO SUMATORIA
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ (para $-1 < x < 1$)	$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$\text{sen } x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ (para $-1 < x \leq 1$)	$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$

Serie de Taylor para una función de varias variables

Para una función de dos variables, la serie de Taylor (hasta los términos de primer grado) es:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} (y - y_0) + \dots$$

y para tres variables:

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0, z_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0, z_0} (y - y_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{x_0, y_0, z_0} (z - z_0) + \dots$$