OPERACIONES DIFERENCIALES VECTORIALES ∇

El operador nabla en coordenadas rectangulares, está definido como $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$.

Nabla proporciona una notación conveniente para ciertas operaciones diferenciales , ya que al tratarlo como vector permite recordar con facilidad algunas operaciones como la divergencia y el rotacional.

Debe quedar claro que nabla es un **operador diferencial vectorial** y que la notación usada en esta definición no significa que las derivadas parciales sean de los vectores unitarios (derivadas tales como $\partial\hat{\mathbf{i}}/\partial x$ serían idénticamente cero). Por lo tanto, nabla sólo tiene sentido cuando se utiliza con una función (escalar, vectorial o tensorial). El símbolo ∇ se le conoce como "del".

Definiciones integrales de las operaciones diferenciales

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \qquad \nabla \times \mathbf{F} \equiv \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint \mathbf{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Operaciones diferenciales en coordenadas rectangulares

En la siguiente tabla, f es una función escalar y $\mathbf{F}$ es una función vectorial con componentes F_x , F_y y F_z .

OPERADOR		APLICA A	RESULTA	DEFINICIÓN
gradiente	∇f	escalar	vector	$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$
	$\nabla \mathbf{F}$	vector	tensor	$\nabla \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_x}{\partial y} & \frac{\partial F_y}{\partial y} & \frac{\partial F_z}{\partial y} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} & \frac{\partial F_y}{\partial z} & \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{bmatrix}$
divergencia	$\nabla \cdot \mathbf{F}$	vector	escalar	$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \left(F_x\hat{\mathbf{i}} + F_y\hat{\mathbf{j}} + F_z\hat{\mathbf{k}} \right) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
rotacional	$\nabla \times \mathbf{F}$	vector	vector	$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)\hat{\mathbf{k}}$
laplaciano	$\nabla^2 f$	escalar	escalar	$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
	$\nabla^2 \mathbf{F}$	vector	vector	$\nabla^2 \mathbf{F} = \left(\nabla^2 F_x \right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\nabla^2 F_y \right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\nabla^2 F_z \right)\hat{\mathbf{k}}$
biarmónico	$\nabla^4 f$	escalar	escalar	$\nabla^4 f = \nabla^2\left(\nabla^2 f \right) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z^2} + 2\frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial z^2}$
de onda (de d'Alembert)	$\Box^2 f$	escalar	escalar	$\Box^2 f = \nabla^2 f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$

Identidades vectoriales

En las siguientes, identidades, u y v son funciones escalares, mientras que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son funciones vectoriales.

$$\nabla(uv) \equiv u\nabla v + v\nabla u$$
$$\nabla^2(uv) \equiv u\nabla^2 v + 2(\nabla u)\cdot(\nabla v) + v\nabla^2 u$$
$$\nabla\cdot(u\mathbf{A}) \equiv u\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla u$$
$$\nabla\times(u\mathbf{A}) \equiv u\nabla\times\mathbf{A} + \mathbf{A}\times\nabla u$$
$$\nabla^2(u\mathbf{A}) \equiv u\nabla^2\mathbf{A} + 2(\nabla u)\cdot(\nabla\mathbf{A}) + \mathbf{A}\nabla^2 u$$
$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \equiv \mathbf{A}\cdot(\nabla\mathbf{B}) + \mathbf{B}\cdot(\nabla\mathbf{A}) + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})$$
$$\nabla^2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \equiv \mathbf{A}\cdot\nabla^2\mathbf{B} - \mathbf{B}\cdot\nabla^2\mathbf{A} + 2\nabla\cdot(\mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{A} + \mathbf{B}\times\nabla\times\mathbf{A})$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \equiv \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$$
$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \equiv \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \mathbf{B}\cdot(\nabla\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\mathbf{B})$$

$$\nabla\cdot(\nabla u) \equiv \nabla^2 u$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) \equiv 0$$
$$\nabla\times(\nabla u) \equiv 0$$
$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) \equiv \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$
$$\nabla^2(\nabla u) \equiv \nabla(\nabla^2 u)$$
$$\nabla^2(\nabla\cdot\mathbf{A}) \equiv \nabla\cdot(\nabla^2\mathbf{A})$$
$$\nabla^2(\nabla\times\mathbf{A}) \equiv \nabla\times(\nabla^2\mathbf{A})$$

Algunos teoremas integrales

teorema del gradiente $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f)\cdot d\vec{\ell} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$	Sea f una función diferenciable, y sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ vectores de posición de dos puntos en el espacio. La integral de línea de la componente del gradiente de f tangencial a una curva C que une los puntos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es igual a la diferencia de f evaluada en los dos extremos de la curva.
teorema de Gauss $\int_V (\nabla\cdot\mathbf{F})dV = \oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{A}$	Sea V una región en el espacio encerrada por la superficie S continua por partes, y sea $\mathbf{F}$ una función vectorial diferenciable. Entonces, la integral de la divergencia de $\mathbf{F}$ en el volumen V es igual a la integral cerrada de área de la componente de $\mathbf{F}$ normal a la superficie.
teorema de Stokes $\int_S (\nabla\times\mathbf{F})dA = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\vec{\ell}$	Sea S una superficie abierta delimitada por una curva C, y sea $\mathbf{F}$ una función vectorial diferenciable. Entonces, la integral del rotacional de $\mathbf{F}$ en la superficie S es igual a la integral cerrada de linea de la componente de $\mathbf{F}$ tangencial a la curva .