

Descomposición en Fracciones Parciales

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \dots$$

Cuando se tiene una función racional de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, puede descomponerse dicha función en la forma de una suma de fracciones de primer o segundo orden, siempre que $Q(x)$ pueda factorizarse. El grado del numerador $P(x)$ debe ser menor que el grado del denominador $Q(x)$. En caso de que no sea así, se realiza primero la división de los polinomios y se aplica la descomposición en fracciones parciales al residuo obtenido.

CASO	TIPO DE DESCOMPOSICIÓN
1. Factores lineales no repetidos	Una fracción para cada factor, donde el numerador es una constante desconocida. Ejemplo: $\frac{1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$
2. Factores lineales repetidos ^(*)	Una fracción para cada potencia entera del factor, desde 1 hasta la potencia que tiene en la función original, cada una con una constante desconocida en el numerador. Ejemplo: $\frac{1}{(x-1)^4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{(x-1)^4}$
3. Factores cuadráticos no repetidos	Una fracción para cada factor, donde el numerador es un polinomio de primer orden con coeficientes desconocidos. Ejemplo: $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+5)(x^2+x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+5)} + \frac{Ex+F}{(x^2+x+1)}$
4. Factores cuadráticos repetidos ^(*)	Una fracción para cada potencia entera del factor, desde 1 hasta la potencia que tiene en la función original, empleando polinomios de orden 1 de coeficientes desconocidos en cada numerador. Ejemplo: $\frac{1}{(x^2+2)^3} = \frac{Ax+B}{(x^2+2)} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^3}$

^(*) es decir, elevados a una potencia mayor que 1

Cuando se tenga una combinación de los casos anteriores, se aplican las reglas correspondientes empleando constantes sucesivas. Ejemplo:

$$\frac{1}{x^3(x-1)(x^2+5)(x^2+x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{(x-1)} + \frac{Ex+F}{(x^2+5)} + \frac{Gx+H}{(x^2+x+2)}$$

Una vez planteada la descomposición, se procede a hacer la suma formal de las fracciones, para luego igualar el numerador obtenido con el numerador de la función original. De ahí, se obtiene una ecuación con los coeficientes de cada potencia de x y se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido para encontrar los valores de las constantes.