SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Hay varios métodos de solución para ecuaciones diferenciales de primer orden, ya sean lineales o no lineales. Aquí se presentan sólo los dos más comunes: el método de separación de variables, y el método de factor de integración para ecuaciones lineales de primer orden. Los demás métodos tienen aplicación menos frecuentemente, y pueden consultarse en libros de ecuaciones diferenciales.

Separación de variables

La ecuación diferencial más simple que existe es: $\frac{dy}{dx}=0$, y su solución es simplemente $y=C$.

Esta idea se extiende a cualquier caso en el que se tenga una derivada de alguna expresión igual a cero. Automáticamente, la solución es esa misma expresión igualada a una constante.

Una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx}=g(x)$ se resuelve por simple integración: $y=\int g(x)dx+C$.

Cuando una ecuación diferencial se puede acomodar en la forma $\frac{dy}{dx}=\frac{g(x)}{h(y)}$, se dice que es **separable**. La solución es

$$\int h(y)dy=\int g(x)dx+C$$

Factor de integración

Cuando se tiene una ecuación diferencial lineal de primer orden de la forma:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$$

puede convertirse en una ecuación exacta si se multiplica por un factor de integración $\mu(x)$ dado por:

$$\mu(x)=e^{\int P(x)dx}$$

Entonces se multiplica toda la ecuación diferencial por el factor de integración:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx}+\mu(x)P(x)y=\mu(x)f(x)$$

El miembro izquierdo de la ecuación resulta ser la derivada del producto del factor de integración por la variable dependiente (nota: este paso normalmente se escribe directamente pero es una buena costumbre verificar que efectivamente es equivalente al paso anterior).

$$\frac{d}{dx}\left[\mu(x)y\right]=\mu(x)f(x)$$

A continuación se integra ambos miembros de la ecuación y se despeja la variable dependiente:

$$y=\frac{1}{\mu(x)}\left[\int\mu(x)f(x)dx+C\right]$$

SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL HOMOGÉNEA DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

Una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden de coeficientes constantes tiene la forma:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

donde a_2, a_1 y a_0 son constantes reales y $a_2 \neq 0$. La ecuación característica asociada a esta ecuación diferencial es el polinomio de segundo grado en m:

$$a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$$

Las raíces del polinomio son los valores de m que satisfacen la ecuación característica, que generalmente se identifican como m_1 y m_2. La solución general de la ecuación diferencial se establece directamente dependiendo de el tipo de estas raíces, según los casos siguentes:

CASO 1: *Raíces reales diferentes*

Si las raíces son dos números reales diferentes m_1 y m_2, la solución general está expresada en términos de funciones exponenciales de la siguiente forma:

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

CASO 2: *Raíces reales repetidas*

Si las dos raíces son iguales, es decir, $m_1 = m_2 = m$, entonces la solución general tiene la siguiente forma:

$$y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}$$

CASO 3: *Raíces complejas conjugadas*

Si las raíces son de la forma $m_1 = \alpha + \beta i$ y $m_2 = \alpha - \beta i$ (a veces expresado como $m = \alpha \pm \beta i$), entonces la solución general es de la forma:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \operatorname{sen}(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

CASO ESPECIAL 1: *Raíces imaginarias puras*

Si las raíces son de la forma $m_1 = ki$ y $m_2 = -ki$ (o bien $m = \pm ki$) la solución no tiene parte exponencial y sólo está formada por funciones trigonométricas:

$$y = C_1 \operatorname{sen}(kx) + C_2 \cos(kx)$$

CASO ESPECIAL 2: *Raíces reales iguales pero de signo opuesto*

Si las raíces son de la forma $m_1 = k$ y $m_2 = -k$ (o lo que es equivalente, $m = \pm k$) la solución puede expresarse en términos de funciones trigonométricas hiperbólicas en vez de exponenciales:

$$y = C_1 \operatorname{senh}(kx) + C_2 \cosh(kx)$$

NOTA: Este método se extiende directamente para la solución de ecuaciones diferenciales homogéneas, de coeficientes constantes, de orden mayor a dos.