DINÁMICA DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Forma general de la ecuación diferencial	Función de transferencia para $Y(s)=G(s)U(s)$
$\tau^2 \dfrac{d^2y}{dt^2}+2\xi\tau\dfrac{dy}{dt}+y=Ku$	$G(s)=\dfrac{K}{\tau^2 s^2+2\xi\tau s+1}$

Simbología

- ★ $y(t)$ – salida del sistema (como variable de desviación)
- ★ $u(t)$ – entrada del sistema (como variable de desviación)
- ★ τ – periodo natural de oscilación del sistema
- ★ ξ – factor de amortiguamiento
- ★ K – ganancia estática (en estado estable) del sistema
- ★ ω – frecuencia (angular) del sistema
- ★ ϕ – ángulo de fase del sistema (en radianes)

Respuesta de un sistema de segundo orden a un escalón en la entrada

La transformada de Laplace de la entrada (escalón de magnitud A) y de la salida son:

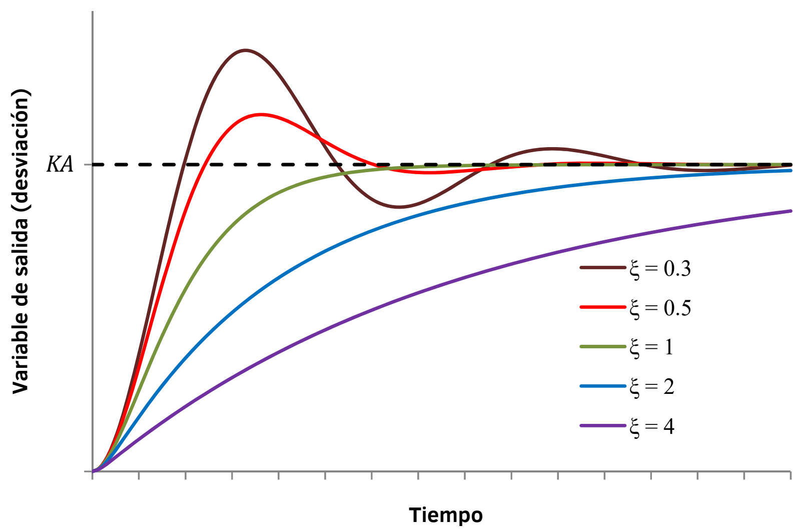
$$U(s)=\frac{A}{s}$$

$$Y(s)=\frac{KA}{s\left(\tau^2 s^2+2\xi\tau s+1\right)}$$

Para la separación en fracciones parciales, las raíces de $\tau^2 s^2+2\xi\tau s+1$ son:

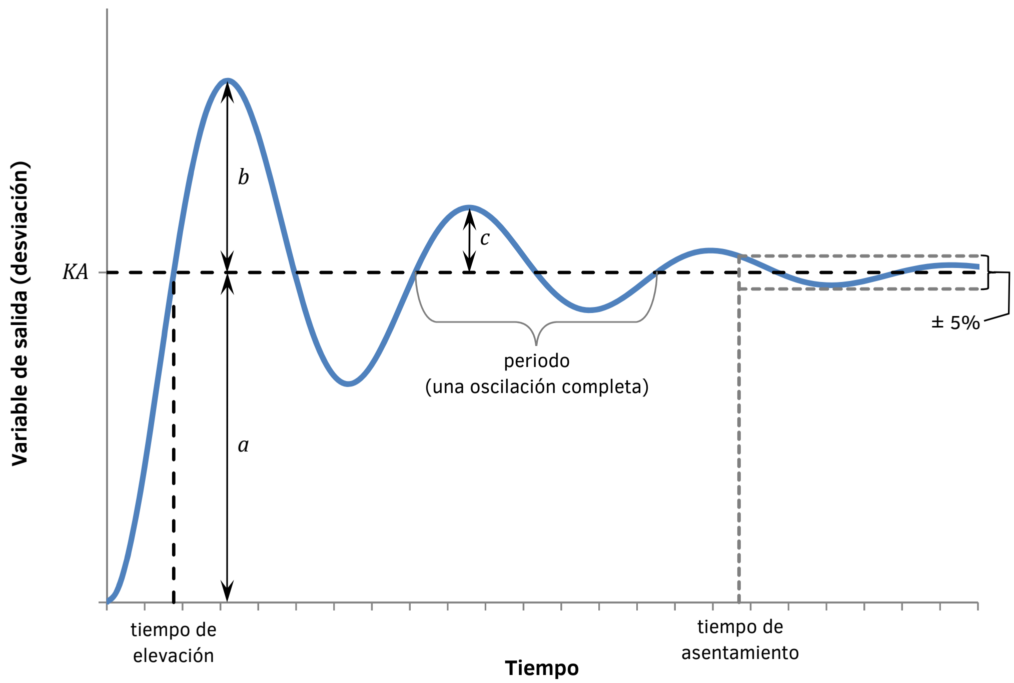
$$s=\frac{-\xi\pm\sqrt{\xi^2-1}}{\tau}$$

Debido a la raíz cuadrada, dependiendo del valor de ξ se tendrán raíces reales o complejas, por lo que se distinguen tres casos:



CASO 1	$0<\xi<1$ SUBAMORTIGUADO (dos raíces complejas conjugadas)	$y(t)=KA\left[1-\dfrac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\exp\left(-\dfrac{\xi t}{\tau}\right)\operatorname{sen}(\omega t+\phi)\right]$ donde $\omega=\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\tau}$ y $\phi=\arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)$ La respuesta subamortiguada es inicialmente más rápida que la críticamente amortiguada o la sobreamortiguada. Aunque alcanza pronto el valor final, no permanece ahí, sino que se sobrepasa y oscila con amplitud decreciente. El comportamiento oscilatorio se vuelve más pronunciado conforme el factor de amortiguamiento ξ se vuelve más pequeño.
CASO 2	$\xi=1$ CRÍTICAMENTE AMORTIGUADO (dos raíces reales iguales)	$y(t)=KA\left[1-\left(1+\dfrac{t}{\tau}\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right]$ Similar a los sistemas sobreamortiguados, pero es el que responde más rápidamente sin que se produzcan oscilaciones.
CASO 3	$\xi>1$ SOBREAMORTIGUADO (dos raíces reales diferentes)	$y(t)=KA\left\{1-\exp\left(-\dfrac{\xi t}{\tau}\right)\left[\cosh\left(\dfrac{t}{\tau}\sqrt{\xi^2-1}\right)+\dfrac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\operatorname{senh}\left(\dfrac{t}{\tau}\sqrt{\xi^2-1}\right)\right]\right\}$ Tiene cierta semejanza con la respuesta de un sistema de primer orden, pero la pendiente en el origen es cero. La respuesta es más lenta entre mayor sea el valor del factor de amortiguamiento.

Análisis detallado del comportamiento de un sistema subamortiguado ante un escalón en la entrada



SOBRETIRO (overshoot)	Es la relación b/a, donde $a = KA$ es el valor final de la respuesta y b es la máxima cantidad que la respuesta sobrepasa su valor final. El sobretiro depende de ξ. $$\text{sobretiro} = \frac{b}{a} = \exp\left(\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$
RAZÓN DE ASENTAMIENTO (decay ratio)	Es la relación c/b, es decir, la relación que existe entre qué tanto la respuesta sobrepasó al valor final en dos máximos sucesivos. $$\text{razón de asentamiento} = \frac{c}{b} = \exp\left(\frac{-2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) = (\text{sobretiro})^2$$
PERIODO DE OSCILACIÓN (T, period)	Es el tiempo que dura una oscilación completa. $$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}$$
TIEMPO DE ELEVACIÓN (t_R, rise time)	Es el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar por primera vez su valor final. Se emplea para caracterizar qué tan rápido responde un sistema de segundo orden. $$t_R = \frac{\tau(\pi-\phi)}{\sqrt{1-\xi^2}}$$
TIEMPO DE SOBRETIRO ($t_{\max}$, overshoot time)	Es el tiempo que tarda la respuesta en alcanzar su valor máximo. $$t_{\max} = \frac{\pi\tau}{\sqrt{1-\xi^2}}$$
TIEMPO DE ASENTAMIENTO (response time)	Es el tiempo que tarda la respuesta en quedar restringida dentro de ciertos límites arbitrarios (por ejemplo ±5%) del valor final. No hay fórmula específica para determinarlo.