ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA TÉRMICA

SIMPLIFICADA PARA UN FLUIDO NEWTONIANO DE PROPIEDADES CONSTANTES
EN FLUJO INCOMPRESIBLE O A PRESIÓN CONSTANTE
(para un fluido o sólido en reposo, $\mathbf{v} = 0$)

$$\rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} \quad + \rho c_P \mathbf{v} \cdot \nabla T \quad - k \nabla^2 T \quad - \mu \Phi_v \quad - \dot{G} \quad = 0$$

acumulación	advección	conducción	disipación viscosa	generación

Coordenadas Rectangulares

$$\rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_P \left[v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] - k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] - \mu \Phi_v - \dot{G} = 0$$

Coordenadas Cilíndricas

$$\rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_P \left[v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] - k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] - \mu \Phi_v - \dot{G} = 0$$

Coordenadas Esféricas

$$\rho c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_P \left[v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right] - k \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right]$$
$$- \mu \Phi_v - \dot{G} = 0$$

NOTACIÓN:

c_P = capacidad calorífica a presión constante (J/kg·K).
$\dot{G}$ = rapidez de generación de calor por unidad de volumen (W/m³).
k = conductividad térmica (W/m·K).
T = temperatura (K).
t = tiempo (s).
$\mathbf{v}$ = vector de velocidad del fluido (m/s).
Φ_v = disipación viscosa (s^{-2}).
μ = viscosidad (Pa·s).
ρ = densidad (kg/m³).

DISIPACIÓN VISCOSA

PARA UN FLUIDO NEWTONIANO DE VISCOSIDAD
Y DENSIDAD CONSTANTES

$$\Phi_v = \dot{\boldsymbol{\gamma}} : \nabla \mathbf{v}$$

Coordenadas Rectangulares

$$\Phi_v = 2\left[\frac{\partial v_x}{\partial x}\right]^2 + 2\left[\frac{\partial v_y}{\partial y}\right]^2 + 2\left[\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]^2 + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right]^2 + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right]^2$$

Coordenadas Cilíndricas

$$\Phi_v = 2\left[\frac{\partial v_r}{\partial r}\right]^2 + 2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right]^2 + 2\left[\frac{\partial v_z}{\partial z}\right]^2 + \left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]^2 + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right]^2 + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right]^2$$

Coordenadas Esféricas

$$\Phi_v = 2\left[\frac{\partial v_r}{\partial r}\right]^2 + 2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right]^2 + 2\left[\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot\theta}{r}\right)\right]^2 + \left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]^2$$

$$+ \left[\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{v_\phi}{\sin\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]^2 + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\phi}{r}\right)\right]^2$$

NOTACIÓN:

$\mathbf{v}$ = vector de velocidad del fluido (m/s).

Φ_v = disipación viscosa (s^{-2}).

$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = (\nabla \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{v})^T$ = tensor simétrico de rapidez de deformación (s^{-1}).

$(\nabla \mathbf{v})$ = tensor gradiente de velocidad (s^{-1}).

$(\nabla \mathbf{v})^T$ = transpuesta del tensor gradiente de velocidad (s^{-1}).