FUNCIONES DE BESSEL

La ecuación diferencial de Bessel aparece frecuentemente en el estudio de sistemas cilíndricos:

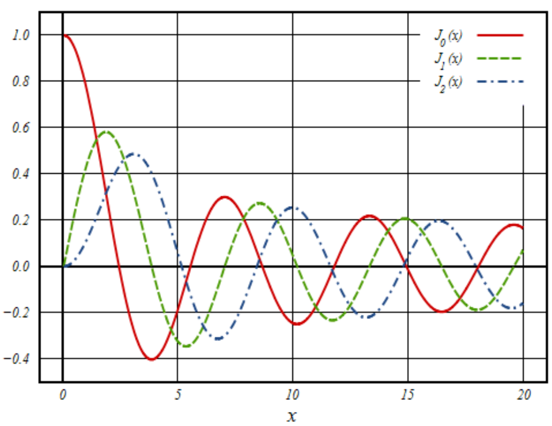
$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0$$

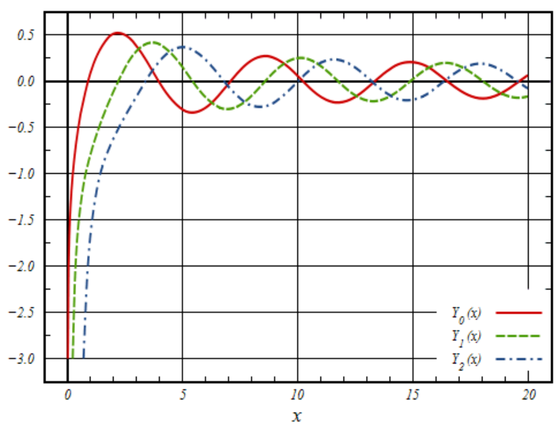
donde ν es el *orden* de la ecuación. Para cualquier valor de ν, la solución general de la ecuación se puede expresar como:

$$y(x) = C_1 \, \mathrm{J}_\nu(x) + C_2 \, \mathrm{Y}_\nu(x)$$

donde $\mathrm{J}_\nu(x)$ y $\mathrm{Y}_\nu(x)$ se denominan funciones de Bessel del primer tipo y segundo tipo, respectivamente, de orden ν.

$$\mathrm{J}_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu} \qquad \mathrm{Y}_\nu(x) = \frac{\mathrm{J}_\nu(x)\cos(\nu\pi) - \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\mathrm{sen}(\nu\pi)}$$





FUNCIONES MODIFICADAS DE BESSEL

La ecuación de Bessel también aparencen frecuentemente con un cambio de signo:

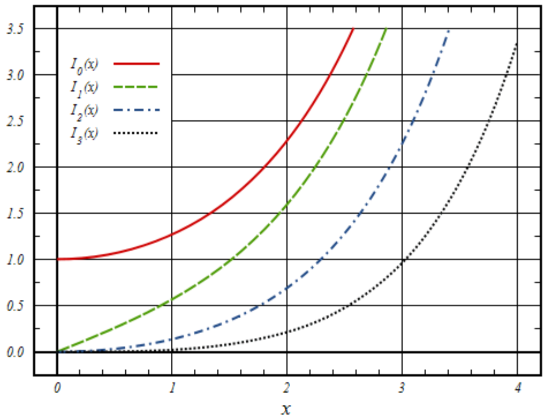
$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - \left(x^2 + \nu^2\right) y = 0$$

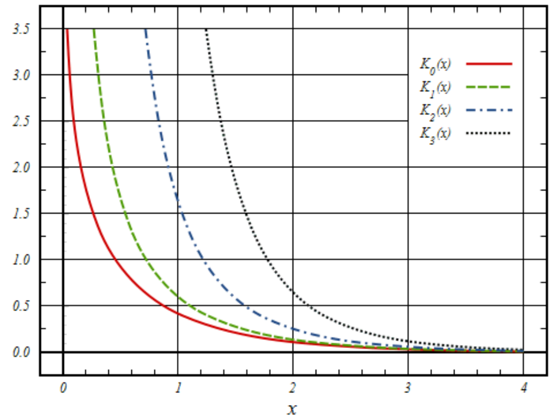
Empleando un cambio de variables empleando números imaginarios se puede escribir esta ecuación en la forma de la ecuación de Bessel. En este caso, la solución general de la ecuación se expresa como:

$$y(x) = C_1 \, \mathrm{I}_\nu(x) + C_2 \, \mathrm{K}_\nu(x)$$

donde $\mathrm{I}_\nu(x)$ y $\mathrm{K}_\nu(x)$ se denominan funciones modificadas de Bessel del primer tipo y segundo tipo, respectivamente, de orden ν.

$$\mathrm{I}_\nu(x) = i^{-\nu}\,\mathrm{J}_\nu(ix) \qquad\qquad \mathrm{K}_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{I}_{-\nu}(x) - \mathrm{I}_\nu(x)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)}$$





ECUACIONES QUE SE PUEDEN RESOLVER EN TÉRMINOS DE LAS FUNCIONES DE BESSEL

FORMA GENERAL 1

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(a + 2bx^p\right)\frac{dy}{dx} + \left[c + sx^{2q} + b\left(a + p - 1\right)x^p + b^2x^{2p}\right]y = 0$$

tiene solución general:

$$y(x) = x^\alpha\,\mathrm{e}^{-\beta x^p}\left[C_1\,\mathrm{J}_\nu\left(\lambda x^q\right) + C_2\,\mathrm{Y}_\nu\left(\lambda x^q\right)\right]$$

donde $\alpha = \frac{1-a}{2}$, $\beta = \frac{b}{p}$, $\lambda = \frac{\sqrt{|s|}}{q}$, $\nu = \frac{\sqrt{(1-a)^2 - 4c}}{2q}$

si $s < 0$, J_ν y Y_ν se deben cambiar a I_ν y K_ν, resepectivamente. Si ν no es un entero, Y_ν y K_ν se pueden remplazar por $\mathrm{J}_{-\nu}$ y $\mathrm{I}_{-\nu}$ si se desea.

FORMA GENERAL 2

$$\frac{d}{dx}\left(x^r\frac{dy}{dx}\right) + \left(ax^t + bx^{r-2}\right)y = 0$$

tiene solución general:

$$y(x) = x^\alpha\left[C_1\,\mathrm{J}_\nu\left(\lambda x^\gamma\right) + C_2\,\mathrm{Y}_\nu\left(\lambda x^\gamma\right)\right]$$

donde $\alpha = \frac{1-r}{2}$, $\gamma = \frac{2-r+t}{2}$, $\lambda = \frac{2\sqrt{|a|}}{2-r+t}$, $\nu = \frac{\sqrt{(1-r)^2 - 4b}}{2-r+t}$

si $a < 0$, J_ν y Y_ν se deben cambiar a I_ν y K_ν, resepectivamente. Si ν no es un entero, Y_ν y K_ν se pueden remplazar por $\mathrm{J}_{-\nu}$ y $\mathrm{I}_{-\nu}$ si se desea.

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES BESSEL

$$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{J}_\nu(ax)\right] = a\,\mathrm{J}_{\nu-1}(ax) - \frac{\nu}{x}\mathrm{J}_\nu(ax)$$

$$= -a\,\mathrm{J}_{\nu+1}(ax) + \frac{\nu}{x}\mathrm{J}_\nu(ax)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{Y}_\nu(ax)\right] = a\,\mathrm{Y}_{\nu-1}(ax) - \frac{\nu}{x}\mathrm{Y}_\nu(ax)$$

$$= -a\,\mathrm{Y}_{\nu+1}(ax) + \frac{\nu}{x}\mathrm{Y}_\nu(ax)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{I}_\nu(ax)\right] = a\,\mathrm{I}_{\nu-1}(ax) - \frac{\nu}{x}\mathrm{I}_\nu(ax)$$

$$= a\,\mathrm{I}_{\nu+1}(ax) + \frac{\nu}{x}\mathrm{I}_\nu(ax)$$

$$= \frac{a}{2}\left[\mathrm{I}_{\nu-1}(ax) + \mathrm{I}_{\nu+1}(ax)\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{K}_\nu(ax)\right] = -a\,\mathrm{K}_{\nu-1}(ax) - \frac{\nu}{x}\mathrm{K}_\nu(ax)$$

$$= -a\,\mathrm{K}_{\nu+1}(ax) + \frac{\nu}{x}\mathrm{K}_\nu(ax)$$

$$= -\frac{a}{2}\left[\mathrm{K}_{\nu-1}(ax) + \mathrm{K}_{\nu+1}(ax)\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu\,\mathrm{J}_\nu(ax)\right] = ax^\nu\,\mathrm{J}_{\nu-1}(ax)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu\,\mathrm{Y}_\nu(ax)\right] = ax^\nu\,\mathrm{Y}_{\nu-1}(ax)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu\,\mathrm{I}_\nu(ax)\right] = ax^\nu\,\mathrm{I}_{\nu-1}(ax)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^\nu\,\mathrm{K}_\nu(ax)\right] = -ax^\nu\,\mathrm{K}_{\nu-1}(ax)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}\,\mathrm{J}_\nu(ax)\right] = -ax^{-\nu}\,\mathrm{J}_{\nu+1}(ax)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}\,\mathrm{Y}_\nu(ax)\right] = -ax^{-\nu}\,\mathrm{Y}_{\nu+1}(ax)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}\,\mathrm{I}_\nu(ax)\right] = ax^{-\nu}\,\mathrm{I}_{\nu+1}(ax)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}\,\mathrm{K}_\nu(ax)\right] = -ax^{-\nu}\,\mathrm{K}_{\nu+1}(ax)$$