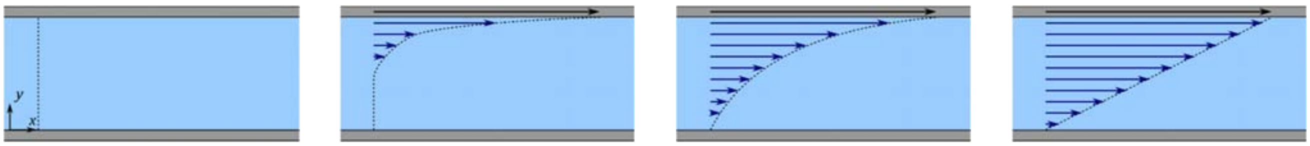
FLUJO TRANSITORIO DE COUETTE

Fluido inicialmente en reposo entre dos placas planas paralelas



$t = 0$ → conforme transcurre el tiempo → $t \to \infty$

fluido en reposo inicialmente — perfil en estado estable

> Se tiene un fluido inicialmente en reposo, entre dos placas planas paralelas de infinita extensión, separadas por una distancia δ. En $t = 0$, la placa superior se pone instantáneamente en movimiento con una velocidad v_0, mientras que la placa inferior se mantiene fija. Se desea determinar el perfil de velocidad del fluido en función de la posición y del tiempo, $v_x(y,t)$.

Suposiciones

1. Condiciones transitorias (no es estado estable).
2. $v_y = 0$, $v_z = 0$.
3. v_x varía en la dirección y, pero no depende de x ni de z.
4. No se consideran efectos de borde.
5. No hay gradientes de presión.
6. Fluido newtoniano con propiedades constantes.

Simplificación de las ecuaciones de conservación

La **ecuación de conservación de masa**, para flujo incompresible, en coordenadas rectangulares es:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

donde se cancelan todos los términos según las suposiciones.

La **ecuación de conservación de momentum**, para fluidos newtonianos de propiedades constantes, en coordenadas rectangulares, componente x es:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho\left[v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}\right]$$
$$-\mu\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right] + \frac{\partial P}{\partial x} - \rho g_x = 0$$

que se simplifica a:

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$$

o bien, reacomodando:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \qquad \to \qquad \frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

donde se ha introducido la definición de la viscosidad cinemática, $\nu = \mu / \rho$. Se tiene entonces una ecuación diferencial parcial de segundo orden, parabólica, lineal, homogénea, de coeficientes constantes.

Las condiciones de frontera son:

(1) en $y = 0$: $v_x = 0$
(2) en $y = \delta$: $v_x = v_0$

y se necesita también una condición inicial:

(i) en $t = 0$: $v_x = 0$

Una de las condiciones de frontera presenta un problema: no es homogénea (es decir, no es igual a cero), lo cual dificultaría más adelante el proceso de solución. Para evitar esta complicación, es necesario primero transformar este problema en uno con condiciones de frontera homogéneas.

Transformación en un problema homogéneo

Se plantea que la solución buscada se puede separar en una parte estable y una transitoria:

$$v_x(y,t) = \underbrace{s(y)}_{\text{(estable)}} + \underbrace{u(y,t)}_{\text{(transitoria)}}$$

donde se requiere que $u(y,t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Entonces, se sustituye $v_x = s + u$ en la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \qquad \to \qquad \frac{\partial}{\partial t}(s+u) = \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2}(s+u)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = \nu\left[\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

pero $\partial s / \partial t = 0$ porque s no depende de t, con lo que se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\left[\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

Ahora se puede separar esta ecuación en dos ecuaciones, una para s y otra para u, de tal forma que si se sumaran se obtuviera de nuevo la ecuación original:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad y \qquad 0 = \nu \frac{\partial^2 s}{\partial y^2}$$

Respecto a las condiciones de frontera, asigna arbitrariamente $u = 0$ (es lo que se requiere) y luego se obtienen las condiciones para s a partir del planteamiento original $v_x = s + u$, es decir, de $s = v_x - u$:

(1) en $y = 0$: $v_x = 0 \;\Rightarrow\; u = 0$ y $s = 0$
(2) en $y = \delta$: $v_x = v_0 \;\Rightarrow\; u = 0$ y $s = v_0$

La condición inicial para u se deducirá más adelante. Ahora se debe resolver cada problema por separado, para s y para u.

Solución para la parte estable $s(y)$

La ecuación diferencial es:

$$\frac{d^2s}{dy^2} = 0$$

con condiciones de frontera:

(1) en $y = 0$: $s = 0$
(2) en $y = \delta$: $s = v_0$

(nótese que la ecuación diferencial aparece ya en derivadas ordinarias, puesto que s sólo depende de y, y que la viscosidad cinemática ν se ha eliminado al pasarla dividiendo al cero).

La ecuación diferencial se resuelve por simple integración, para dar la solución general:

$$s = C_1 y + C_2$$

Luego de aplicar las condiciones de frontera, se llega a la solución particular:

$$s = \frac{y}{\delta} v_0$$

Solución para la parte transitoria $u(y,t)$

La ecuación diferencial es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

con condiciones de frontera (homogéneas):

(1) en $y = 0$: $u = 0$
(2) en $y = \delta$: $u = 0$

y se necesita también una condición inicial, obtenida a partir del planteamiento original $v_x = s + u$, es decir, $u = v_x - s$, donde s es la solución estable obtenida anteriormente:

$$\text{en } t = 0: \qquad v_x = 0 \quad \text{y} \quad s = \frac{y}{\delta} v_0 \qquad \rightarrow \qquad u = 0 - \frac{y}{\delta} v_0$$

Entonces, se llega a la condición inicial para u:

(i) en $t = 0$: $u = -\frac{y}{\delta} v_0$

Para resolver la ecuación diferencial, se aplica el método de **separación de variables**. Se asume que $u(y,t)$ es el producto de una función de y y una función de t:

$$u(y,t) = Y(y)T(t)$$

(en este método, se suele indicar estas funciones con las mismas letras que las variables independientes, pero en mayúsculas).

Entonces, se sustituye $u = YT$ en la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t}(YT) = \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2}(YT)$$

Como Y no depende de t se puede sacar como constante de la primera derivada. Lo mismo se puede decir de T en la segunda derivada, porque no depende de y, con lo que se obtiene:

$$Y \frac{\partial T}{\partial t} = \nu T \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$$

Dividiendo entre νYT (la viscosidad cinemática ν se deja del lado más sencillo de la ecuación):

$$\frac{1}{\nu T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$$

El lado izquierdo de la ecuación tiene T y su derivada, que dependen de t únicamente (ν es constante), mientras que el lado derecho tiene Y y su segunda derivada, por lo que sólo depende de y. El tiempo puede variar desde cero hasta infinito ($t \geq 0$), la posición puede variar desde cero hasta la separación entre las placas ($0 \leq y \leq \delta$), y de alguna manera los dos miembros de esta ecuación siempre deben ser iguales entre sí. La única manera en que puede mantenerse la igualdad, es que sean iguales a una constante, llamada **constante de separación**.

Estrictamente, deberían considerarse tres casos para dicha constante de separación: cero, un valor positivo o un valor negativo, pero resulta que sólo una constante de separación negativa da soluciones físicamente posibles, por lo que los otros dos casos no se analizarán.

Tomando la constante de separación como $-\lambda^2$, se iguala cada miembro de la ecuación con la constante de separación, y se obtienen las dos ecuaciones diferenciales siguientes, cada una de las cuales se debe resolver por separado:

$$\frac{1}{\nu T} \frac{\partial T}{\partial t} = -\lambda^2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dT}{dt} + \nu\lambda^2 T = 0$$

$$\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -\lambda^2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0$$

(nótese que ahora se emplean derivadas ordinarias puesto que cada función depende únicamente de una variable).

Solución para la función del tiempo $T(t)$

$$\frac{dT}{dt} + \nu\lambda^2 T = 0$$

Ésta es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, lineal, homogénea, que se puede resolver por separación de variables:

$$\frac{dT}{dt} = -\nu\lambda^2 T$$

$$\frac{dT}{T} = -\nu\lambda^2 dt$$

$$\int \frac{dT}{T} = -\nu\lambda^2 \int dt$$

$$\ln T = -\nu\lambda^2 t + \ln C_3$$

$$e^{\ln T} = e^{-\nu\lambda^2 t + \ln C_3}$$

$$T = C_3 e^{-\nu\lambda^2 t}$$

Solución para la función de la posición $Y(y)$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \lambda^2 Y = 0$$

Ésta es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, lineal, homogénea, de coeficientes constantes, que se puede resolver por el método de la ecuación característica. Para ello, primero se escribe la ecuación empleando la notación D para derivadas:

$$D^2Y + \lambda^2 Y = 0$$

y se "factoriza" Y:

$$\left(D^2 + \lambda^2\right)Y = 0$$

La ecuación se vuelve cero cuando cualquiera de los dos "factores" es cero. Obviamente Y no puede ser cero (el perfil de temperatura no dependería de y), por lo que debe ser $\left(D^2 + \lambda^2\right)$ lo que la haga cero. De aquí se obtiene la ecuación característica, remplazando el operador diferencial D por una variable m:

$$m^2 + \lambda^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación característica:

$$\begin{aligned} m^2 &= -\lambda^2 \\ m &= \pm\sqrt{-\lambda^2} \\ m &= \pm\lambda i \end{aligned}$$

Se obtienen raíces imaginarias ya que, por definición, $-\lambda^2$ es un número negativo. Como son raíces imaginarias conjugadas, la solución para Y está dada por funciones trigonométricas:

$$Y = C_4\cos(\lambda y) + C_5\,\mathrm{sen}(\lambda y)$$

Solución para la parte transitoria $u(y,t)$

(continuación)

Una vez que se obtuvieron las soluciones para T y Y, se puede escribir la solución completa para u:

$$u(y,t) = Y(y)T(t)$$
$$u(y,t) = \left[C_4\cos(\lambda y) + C_5\,\mathrm{sen}(\lambda y)\right]\left[C_3 e^{-\nu\lambda^2 t}\right]$$

Aparentemente hay tres constantes, C_3, C_4 y C_5, pero en realidad sólo son dos, porque el producto de una constante desconocida por otra constante desconocida, es simplemente una constante desconocida. Por lo tanto, se define las combinaciones de constantes $A \equiv C_4C_3$ y $B \equiv C_5C_3$, y la solución se vuelve:

$$u(y,t) = \left[A\cos(\lambda y) + B\,\mathrm{sen}(\lambda y)\right]e^{-\nu\lambda^2 t}$$

Ésta es la solución general para u en la que se deben aplicar las condiciones de frontera e inicial, para encontrar las tres constantes desconocidas A, B y λ. Estas condiciones, planteadas anteriormente son:

(1) en $y = 0$: $u = 0$
(2) en $y = \delta$: $u = 0$
(i) en $t = 0$: $u = -\frac{y}{\delta}v_0$

Aplicando la condición de frontera (1):

$$0 = \left[A\cos(0) + B\,\mathrm{sen}(0)\right]e^{-\nu\lambda^2 t}$$

$\cos(0) = 1$ y $\mathrm{sen}(0) = 0$, con lo que se tiene:

$$0 = Ae^{-\nu\lambda^2 t}$$

Al pasar dividiendo la función exponencial $e^{-\nu\lambda^2 t}$ se tiene $A = 0$, con lo que la solución queda simplemente:

$$u(y,t) = B\,\mathrm{sen}(\lambda y)e^{-\nu\lambda^2 t}$$

Ahora se aplica la condición de frontera (2):

$$0 = B\,\mathrm{sen}(\lambda\delta)e^{-\nu\lambda^2 t}$$

Nuevamente, se pasa dividiendo $e^{-\nu\lambda^2 t}$:

$$0 = B\,\mathrm{sen}(\lambda\delta)$$

pero ahora no se puede pasar también dividiendo $\mathrm{sen}(\lambda\delta)$ porque entonces se tendría $B = 0$, y eso haría que $u(y,t) = 0$ siempre, eliminando por completo la parte transitoria de la solución. Entonces, como B no puede ser cero, se llega a la conclusión que $\mathrm{sen}(\lambda\delta) = 0$. Sin embargo, más de un valor del argumento hace que la función seno sea cero:

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}(\pi) &= 0 \\ \mathrm{sen}(2\pi) &= 0 \\ \mathrm{sen}(3\pi) &= 0 \\ &\vdots \\ \mathrm{sen}(n\pi) &= 0 \end{aligned}$$

para cualquier valor de n entero. Igualando $\mathrm{sen}(\lambda\delta) = \mathrm{sen}(n\pi)$ se deduce que $\lambda\delta = n\pi$, por lo que $\lambda = n\pi/\delta$. Pero habrá un número infinito de λ, una para cada valor de n, por lo que se identifican con un subíndice:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{\delta}$$

estos valores de λ_n son los **valores característicos** de este sistema. Además, para cada valor de lambda se tiene una solución u diferente, con su correspondiente constante B desconocida, también identificadas con subíndice:

$$u_n(y,t) = B_n\,\mathrm{sen}(\lambda_n y)e^{-\nu\lambda_n^2 t}$$

¿Cuál de estas soluciones es la que se necesita? Todas. La verdadera solución $u(y,t)$ es la combinación lineal de todas estas soluciones:

$$u(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y,t)$$
$$u(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\mathrm{sen}(\lambda_n y)e^{-\nu\lambda_n^2 t}$$

Para encontrar las constantes B_n, la única pieza de información que queda es la condición inicial, que al aplicarla reduce la solución a:

$$-\frac{y}{\delta}v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(\lambda_n y)$$

Para encontrar B_n, se emplea la propiedad de ortogonalidad de las funciones seno (consultar "Series de Fourier" en libros de Ecuaciones Diferenciales). Primero se sustituye $\lambda_n = n\pi / \delta$:

$$-\frac{y}{\delta}v_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{\delta}\right)$$

y multiplicar toda la ecuación por $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{\delta}\right)$:

$$-\frac{y}{\delta}v_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{\delta}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{\delta}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{\delta}\right)$$

e integrar con respecto a y de 0 a δ:

$$\int_0^\delta -\frac{y}{\delta}v_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{\delta}\right)dy = \int_0^\delta \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{\delta}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{\delta}\right)dy$$

Aplicando la propiedad de linearidad de la integración respecto a la sumatoria, y sacando $-v_0 / \delta$ y B_n como constantes:

$$-\frac{v_0}{\delta}\int_0^\delta y \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{\delta}\right)dy = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^\delta \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{\delta}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{\delta}\right)dy$$

Ahora bien, $\operatorname{sen}(n\pi y/\delta)$ y $\operatorname{sen}(m\pi y/\delta)$ son ortogonales, es decir:

$$\int_0^\delta \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{\delta}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{\delta}\right)dy = 0 \quad \text{si } m \neq n$$

Como la única integral que no es cero es cuando $m = n$, esto efectivamente colapsa toda la sumatoria a un único término. Sustituyendo $m = n$:

$$-\frac{v_0}{\delta}\int_0^\delta y \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi y}{\delta}\right)dy = B_n \int_0^\delta \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi y}{\delta}\right)dy$$

Despejando B_n:

$$B_n = \frac{-\frac{v_0}{\delta}\int_0^\delta y \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{\delta}\right)dy}{\int_0^\delta \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi y}{\delta}\right)dy}$$

Después de efectuar las integraciones, sustituir límites y simplificar términos, se llega a:

$$B_n = \frac{2v_0(-1)^n}{n\pi}$$

o bien, como $n\pi = \lambda_n \delta$:

$$B_n = \frac{2v_0(-1)^n}{\lambda_n \delta}$$

Recordando que la solución para $u(y,t)$ es:

$$u(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(\lambda_n y) e^{-\nu \lambda_n^2 t}$$

al sustituir B_n se tiene:

$$u(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2v_0(-1)^n}{\lambda_n \delta} \operatorname{sen}(\lambda_n y) e^{-\nu \lambda_n^2 t}$$

Como el factor $2v_0 / \delta$ no depende del índice n de la sumatoria, se puede sacar como factor común, con lo que se llega a la forma final de la solución para u:

$$u(y,t) = \frac{2v_0}{\delta}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \operatorname{sen}(\lambda_n y) e^{-\nu \lambda_n^2 t}$$

Solución final: perfil de velocidad $v_x(y,t)$

Recordando que $v_x(y,t) = s(y) + u(y,t)$, lo único que falta es sumar las dos soluciones para obtener el perfil de velocidades:

$$\boxed{v_x(y,t) = \frac{y}{\delta}v_0 + \frac{2v_0}{\delta}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n} \operatorname{sen}(\lambda_n y) e^{-\nu \lambda_n^2 t}}$$

donde los valores característicos son $\lambda_n = \frac{n\pi}{\delta}$.

Con esta solución analítica es posible calcular la velocidad del fluido en cualquier posición y y en cualquier tiempo t.