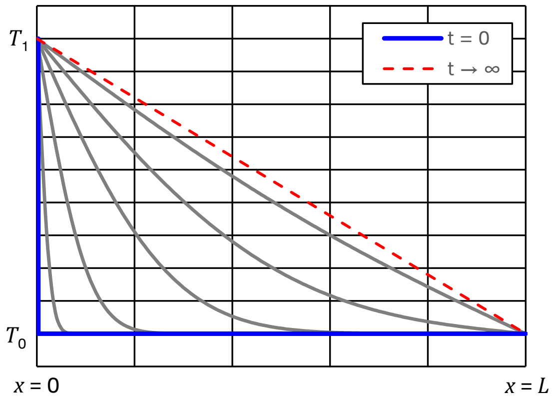
CONDUCCIÓN UNIDIMENSIONAL TRANSITORIA

Calentamiento de una barra recta con temperaturas constantes en los extremos

Considérese una barra recta de longitud L aislada lateralmente, con sección transversal A uniforme, que se encuentra inicialmente a una temperatura T_0. En $t = 0$ se eleva instantáneamente la temperatura del extremo izquierdo a T_1 y se mantiene constante, mientras que el extremo derecho se mantiene a la misma temperatura T_0. Se desea conocer el perfil de temperatura de la barra en función de la posición y del tiempo, $T(x,t)$.



Suposiciones

1. Condiciones transitorias (no estado estable).
2. Sólo hay flujo de calor en la dirección x.
3. La temperatura depende de x y t, pero no de y o z.
4. No hay generación de calor.
5. Sólido con propiedades constantes.

Balance de energía y ecuación diferencial

Se considera un volumen de control de longitud Δx, que tiene un área de sección transversal A. Las diversas contribuciones al balance de energía (todas en joules) son:

Entrada de energía por conducción en x	$q_x\big\|_x A\Delta t$
Salida de energía por conducción en $x+\Delta x$	$q_x\big\|_{x+\Delta x} A\Delta t$
No hay generación	
Acumulación de energía en el volumen de control (final – inicial)	$\rho c_P T\big\|_{t+\Delta t} A\Delta x - \rho c_P T\big\|_t A\Delta x$

El balance de energía E – S + G = A queda:

$$q_x\big|_x A\Delta t - q_x\big|_{x+\Delta x} A\Delta t = \rho c_P T\big|_{t+\Delta t} A\Delta x - \rho c_P T\big|_t A\Delta x$$

Dividiendo entre $A\Delta x\Delta t$:

$$\frac{q_x\big|_x - q_x\big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = \rho c_P \frac{T\big|_{t+\Delta t} - T\big|_t}{\Delta t}$$

Comparando con la definición de la primera derivada:

$$\frac{df}{dx} \equiv \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se ve que es necesario invertir el orden de los términos en la primera fracción, sacando un signo negativo enfrente:

$$-\frac{q_x\big|_{x+\Delta x} - q_x\big|_x}{\Delta x} = \rho c_P \frac{T\big|_{t+\Delta t} - T\big|_t}{\Delta t}$$

Entonces, tomando límites cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta t \to 0$ se obtiene la ecuación diferencial que describe la transferencia de calor transitoria en la barra:

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} = \rho c_P \frac{\partial T}{\partial t}$$

Ahora, se introduce la ley de Fourier de la conducción ($q_x = -k\partial T / \partial x$) con lo que la ecuación diferencial queda:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \rho c_P \frac{\partial T}{\partial t}$$

Como la conductividad térmica es constante:

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_P \frac{\partial T}{\partial t}$$

o bien, agrupando las propiedades del sólido:

$$\frac{k}{\rho c_P}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Se define la difusividad térmica $\alpha \equiv k/\rho c_P$ para escribir la ecuación diferencial en su forma final:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

Ésta es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, parabólica, lineal, homogénea, de coeficientes constantes. Las condiciones de frontera dadas en el planteamiento del problema son:

(1) en $x = 0$: $T = T_1$
(2) en $x = L$: $T = T_0$

y se necesita también una condición inicial:

(i) en $t = 0$: $T = T_0$

Las condiciones de frontera presentan un problema: no son homogéneas (es decir, no son ceros), lo cual dificultaría más adelante la obtención de una solución. Para evitar esta complicación, es necesario primero transformar este problema en uno con condiciones de frontera homogéneas.

Transformación en un problema homogéneo

Se plantea que la solución buscada se puede separar en una parte estable y una transitoria:

$$T(x,t) = \underbrace{s(x)}_{\text{(estable)}} + \underbrace{u(x,t)}_{\text{(transitoria)}}$$

además, se requiere que $u(x,t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Entonces, se sustituye $T = s + u$ en la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t}(s+u) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}(s+u)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left[\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]$$

pero $\partial s / \partial t = 0$ porque s no depende de t, con lo que se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left[\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]$$

Ahora se puede separar esta ecuación en dos, una para s y otra para u, tal que sumadas den la ecuación original:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad y \qquad 0 = \alpha \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

Respecto a las condiciones de frontera, se puede asignar arbitrariamente $u = 0$ (que es lo que se necesita) y luego se obtienen las condiciones para s a partir de $T = s + u$, es decir, de $s = T - u$:

(1) en $x = 0$: $T = T_1 \;\Rightarrow\; u = 0$ y $s = T_1$
(2) en $x = L$: $T = T_0 \;\Rightarrow\; u = 0$ y $s = T_0$

La condición inicial para u se deducirá más adelante. Ahora se debe resolver cada problema por separado, para s y para u.

Solución para la parte estable $s(x)$

La ecuación diferencial es:

$$\frac{d^2 s}{dx^2} = 0$$

con condiciones de frontera:

(1) en $x = 0$: $s = T_1$
(2) en $x = L$: $s = T_0$

(nótese que la ecuación diferencial es en derivadas ordinarias, puesto que s sólo depende de x, y que α se ha eliminado al pasarla dividiendo al otro lado).

La ecuación diferencial se resuelve por simple integración, para dar la solución general:

$$s = C_1 x + C_2$$

Luego de aplicar las condiciones de frontera, se llega a la solución particular:

$$s = T_1 + (T_0 - T_1)\frac{x}{L}$$

Solución para la parte transitoria $u(x,t)$

La ecuación diferencial es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con condiciones de frontera:

(1) en $x = 0$: $u = 0$
(2) en $x = L$: $u = 0$

y se necesita también una condición inicial, obtenida a partir de $T = s + u$, es decir, $u = T - s$, donde s es la solución estable obtenida anteriormente:

$$\text{en } t = 0: \qquad T = T_0 \quad \text{y} \quad s = T_1 + (T_0 - T_1)\frac{x}{L}$$

$$\therefore \quad u = T - s \qquad \rightarrow \qquad u = T_0 - \left[T_1 + (T_0 - T_1)\frac{x}{L} \right]$$

Después de reacomodar, se llega a la condición inicial para u:

(i) en $t = 0$: $u = (T_0 - T_1)\left(1 - \frac{x}{L}\right)$

Para resolver la ecuación diferencial, se aplica el método de **separación de variables**. Se asume que $u(x,t)$ es el producto de una función de x y una función de t:

$$u(x,t) = Z(x)W(t)$$

(en algunos libros de ecuaciones diferenciales, se plantean las funciones empleando las mismas letras que las variables independientes, pero mayúsculas, pero en este caso habría confusión porque T ya se está usando para la temperatura).

Entonces, se sustituye $u = ZW$ en la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t}(ZW) = \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2}(ZW)$$

Pero como Z no depende de t se puede sacar como constante de la primera derivada. Lo mismo se puede decir de W en la segunda derivada, obteniendo:

$$Z\frac{\partial W}{\partial t} = \alpha W \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$$

Dividiendo entre αZW (la difusividad térmica α se deja del lado más sencillo de la ecuación):

$$\frac{1}{\alpha W}\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$$

El lado izquierdo de la ecuación tiene W y su derivada, que dependen de t únicamente (α es constante), mientras que el lado derecho tiene Z y su segunda derivada, por lo que sólo depende de x. El tiempo puede variar desde cero hasta infinito ($t \ge 0$), la posición puede variar desde cero hasta la longitud de la barra ($0 \le x \le L$), y de alguna manera los dos miembros de esta ecuación siempre deben coincidir. La única manera en que puede mantenerse la igualdad, es que sean iguales a una constante, llamada **constante de separación**.

Estrictamente, deberían considerarse tres casos para dicha constante de separación: cero, un valor positivo o un valor negativo, pero resulta que sólo una constante de separación negativa da soluciones físicamente posibles, por lo que los otros dos casos no se analizarán.

Tomando la constante de separación como $-\lambda^2$, se iguala cada miembro de la ecuación con la constante de separación, y se obtienen las dos ecuaciones diferenciales siguientes, cada una de las cuales se debe resolver por separado:

$$\frac{1}{\alpha W}\frac{\partial W}{\partial t} = -\lambda^2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{dW}{dt} + \alpha\lambda^2 W = 0$$

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = -\lambda^2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{d^2 Z}{dx^2} + \lambda^2 Z = 0$$

(nótese que ahora se emplean derivadas ordinarias puesto que cada función depende únicamente de una variable).

Solución para la función del tiempo $W(t)$

$$\frac{dW}{dt} + \alpha\lambda^2 W = 0$$

Ésta es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, lineal, homogénea, que se puede resolver por separación de variables:

$$\frac{dW}{dt} = -\alpha\lambda^2 W$$

$$\frac{dW}{W} = -\alpha\lambda^2 dt$$

$$\int \frac{dW}{W} = -\alpha\lambda^2 \int dt$$

$$\ln W = -\alpha\lambda^2 t + \ln C_3$$

$$e^{\ln W} = e^{-\alpha\lambda^2 t + \ln C_3}$$

$$W = C_3 e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

Solución para la función de la posición $Z(x)$

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + \lambda^2 Z = 0$$

Ésta es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, lineal, homogénea, de coeficientes constantes, que se puede resolver por el método de la ecuación característica. Para ello, primero se escribe la ecuación empleando la notación D para derivadas:

$$D^2 Z + \lambda^2 Z = 0$$

y se "factoriza" Z:

$$\left(D^2 + \lambda^2\right) Z = 0$$

La ecuación se vuelve cero cuando cualquiera de los dos "factores" es cero. Obviamente Z no puede ser cero (el perfil de temperatura no dependería de x), por lo que debe ser $\left(D^2 + \lambda^2\right)$ lo que la haga cero. De aquí se obtiene la ecuación característica, remplazando el operador diferencial D por una variable m:

$$m^2 + \lambda^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación característica:

$$m^2 = -\lambda^2$$

$$m = \pm\sqrt{-\lambda^2}$$

$$m = \pm\lambda i$$

Se obtienen raíces imaginarias ya que, por definición, $-\lambda^2$ es un número negativo. Como son raíces imaginarias conjugadas, la solución para Z está dada por funciones trigonométricas:

$$Z = C_4 \cos(\lambda x) + C_5 \operatorname{sen}(\lambda x)$$

Solución para la parte transitoria $u(x,t)$

(continuación)

Una vez que se obtuvieron las soluciones para W y Z, se puede escribir la solución completa para u:

$$u(x,t) = Z(x)W(t)$$

$$u(x,t) = \left[C_4 \cos(\lambda x) + C_5 \operatorname{sen}(\lambda x)\right]\left[C_3 e^{-\alpha\lambda^2 t}\right]$$

Aunque aparentemente hay tres constantes, C_3, C_4 y C_5, en realidad sólo son dos, porque el producto de una constante desconocida por otra constante desconocida, es simplemente una constante desconocida. Por lo tanto, se define las combinaciones de constantes $A \equiv C_4 C_3$ y $B \equiv C_5 C_3$, y la solución se vuelve:

$$u(x,t) = \left[A\cos(\lambda x) + B \operatorname{sen}(\lambda x)\right] e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

Ésta es la solución general para u en la que se deben aplicar las condiciones de frontera e inicial, para encontrar las tres constantes desconocidas A, B y λ. Estas condiciones, planteadas anteriormente son:

(1) en $x = 0$: $u = 0$
(2) en $x = L$: $u = 0$
(i) en $t = 0$: $u = (T_0 - T_1)\left(1 - \frac{x}{L}\right)$

Aplicando la condición de frontera (1):

$$0 = \left[A\cos(0) + B\operatorname{sen}(0)\right] e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

$\cos(0) = 1$ y $\operatorname{sen}(0) = 0$, con lo que se tiene:

$$0 = A e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

Al pasar dividiendo la función exponencial $e^{-\alpha\lambda^2 t}$ se tiene $A = 0$, con lo que la solución queda simplemente:

$$u(x,t) = B\operatorname{sen}(\lambda x) e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

Ahora se aplica la condición de frontera (2):

$$0 = B\operatorname{sen}(\lambda L) e^{-\alpha\lambda^2 t}$$

Nuevamente, se pasa dividiendo $e^{-\alpha\lambda^2 t}$:

$$0 = B\operatorname{sen}(\lambda L)$$

pero ahora no se puede pasar también dividiendo $\operatorname{sen}(\lambda L)$ porque entonces se tendría $B = 0$, y eso haría que $u(x,t) = 0$ siempre, eliminando por completo la parte transitoria de la solución. Entonces, como B no puede ser cero, se llega a la conclusión que $\operatorname{sen}(\lambda L) = 0$. Sin embargo, más de un valor del argumento hace que la función seno sea cero:

$$\operatorname{sen}(\pi) = 0$$

$$\operatorname{sen}(2\pi) = 0$$

$$\operatorname{sen}(3\pi) = 0$$

$$\vdots$$

$$\operatorname{sen}(n\pi) = 0$$

para cualquier valor de n entero. Igualando $\operatorname{sen}(\lambda L) = \operatorname{sen}(n\pi)$, se deduce que $\lambda L = n\pi$, por lo que $\lambda = n\pi / L$. Pero hay un número infinito de λ, una para cada valor de n, por lo que se identifican con un subíndice:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$$

estos valores de λ_n son los **valores característicos** de este sistema. Además, para cada valor de lambda se tiene una solución u diferente, con su correspondiente constante B desconocida, también identificadas con subíndice:

$$u_n(x,t) = B_n \operatorname{sen}(\lambda_n x) e^{-\alpha\lambda_n{}^2 t}$$

¿Cuál de estas soluciones es la que se necesita? Todas. La verdadera solución $u(x,t)$ es la combinación lineal de todas estas soluciones:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(\lambda_n x) e^{-\alpha\lambda_n{}^2 t}$$

Para encontrar las constantes B_n, la única pieza de información que queda es la condición inicial, que al aplicarla reduce la solución a:

$$(T_0 - T_1)\left(1 - \frac{x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(\lambda_n x) e^{-\alpha\lambda_n{}^2 (0)}$$
$$(T_0 - T_1)\left(1 - \frac{x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(\lambda_n x)$$

B_n se puede encontrar en este caso de forma más o menos directa, comparando esta última ecuación con una serie de Fourier. En primer lugar, se sustituye $\lambda_n = n\pi / L$ para tener:

$$(T_0 - T_1)\left(1 - \frac{x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Dado que el perfil de temperatura se busca sólo para valores de x entre 0 y L, se puede comparar esta última ecuación con la definición de una extensión impar de la serie de Fourier (serie de senos):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

con lo que se ve que los coeficientes buscados B_n son precisamente los coeficientes b_n de la serie de senos, y que la función $f(x)$ es lo del lado izquierdo de la igualdad:

$$f(x) = (T_0 - T_1)\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

Entonces, la fórmula para los coeficientes es:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} dx$$

por lo que se tiene que:

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left[(T_0 - T_1)\left(1 - \frac{x}{L}\right)\right] \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} dx$$

Las temperaturas son constantes:

$$B_n = \frac{2(T_0 - T_1)}{L}\int_0^L \left(1 - \frac{x}{L}\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} dx$$

Después de integrar, sustituir límites y simplificar términos, se llega a:

$$B_n = \frac{2(T_0 - T_1)}{n\pi}$$

o bien, como $n\pi = \lambda_n L$:

$$B_n = \frac{2(T_0 - T_1)}{\lambda_n L}$$

Recordando que la solución para $u(x,t)$ es:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(\lambda_n x) e^{-\alpha\lambda_n{}^2 t}$$

al sustituir B_n se tiene:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(T_0 - T_1)}{\lambda_n L} \operatorname{sen}(\lambda_n x) e^{-\alpha\lambda_n{}^2 t}$$

Como el factor $2(T_0 - T_1)/L$ no depende del índice n de la sumatoria, se puede sacar como factor común, con lo que se llega a la forma final de la solución para u:

$$u(x,t) = \frac{2(T_0 - T_1)}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda_n x)}{\lambda_n} e^{-\alpha\lambda_n{}^2 t}$$

Solución final: perfil de temperatura $T(x,t)$

Recordando que $T(x,t) = s(x) + u(x,t)$, lo único que falta es sumar las dos soluciones para obtener el perfil de temperatura:

$$\boxed{T(x,t) = T_1 + (T_0 - T_1)\frac{x}{L} + \frac{2(T_0 - T_1)}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda_n x)}{\lambda_n} e^{-\alpha\lambda_n{}^2 t}}$$

donde los valores característicos son $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$.

Con esta solución analítica es posible calcular la temperatura en cualquier punto x de la barra en cualquier tiempo t.